多重選択ナップザック問題の限界値計算方法(連続と離散の最適化数理)

辻, 光宏; 仲川, 勇二; 北尾, 匡史; 寺岡, 義伸

数理解析研究所講究録
981巻 1997年 50-56

多重選択ナップザック問題の限界値計算方法

関西大総合情報　辻　光宏 (Mitsuhiro Tsuji)
仲川　勇二 (Yuuji Nakagawa)
関西大高槻　北尾　匡史(Masachika Kitao)
大阪府大総合科学　寺岡　義伸(Yoshinobu Teraoka)

1．概要

多重選択ナップザック問題は，一般化された上限制約を持ったナップザック問題として知られている．最適値の上限を求めることは，実行可能解が最適であることを検証するために必要である．厳密な上限値を得るために，LP 緩和法によって問題を簡単な問題に置き換えることで求められる上限値を，さらに厳密なものに改善していくことになる．

我々は，1979 年に Sinha-Zoltners によって提案された厳密な限界値を求める方法を，さらに厳密な限界値を求める方法について報告する．さらに，同じ問題に対して， Sinha-Zoltners のアルゴリズムによるコンピュータ測定結果と比較し，約 90%以上の問題において，より厳密な上限値を求めることができたので，ここで報告する．

2．多重選択ナップザック問題の LP 緩和問題

この論文で扱う多重選択ナップザック問題は, 以下の通りである.

$|I|$個のクラスとi番目のクラスに$|K_i|$個の選択すべき項目（変数）を持つ多重選択ナップザック問題を以下に示す。

$$[\mathrm{K}]: \max \sum_{i\in I}\sum_{k\in K_i} c_{ik}x_{ik}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in I}\sum_{k\in K_i} a_{ik}x_{ik} \le b$$

$$\sum_{k\in K_i} x_{ik} = 1 \ (i\in I), \quad x_{ik} \ge 0 \ (k\in K_i,\ i\in I)$$

$$\text{for } I=\{1,2,\cdots\}(i\in I), c_{ik} < c_{ik+1} \text{ and } a_{i,k} < a_{i,k+1} \ (k,k+1\in K_i)$$

問題［K］の LP 緩和問題を［R］と定義する.

LP 優越規準を用いて、問題［K］に対する緩和としての縮小 LP 問題を以下のように表すことができる

$$[\mathrm{TLP1}]: \max \sum_{i\in I}\sum_{k\in R_i} c_{ik}x_{ik}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in I}\sum_{k\in R_i} a_{ik}x_{ik} \le b$$

$$\sum_{k\in R_i} x_{ik} = 1 \ (i\in I), \quad x_{ik} \ge 0 \ (k\in R_i,\ i\in I)$$

$$\text{for} \quad R_i = \{r_i(1), r_i(2), \cdots\} \subseteq K_i \ (i\in I),$$

$$r_i(l) < r_i(l+1) \ (l=1,2,\cdots,|R_i|-1,\ i\in I)$$

$$a_{ir} < a_{is},\ c_{ir} < c_{is} \ (r,s\in R_i,\ r<s)$$

$$(c_{is}-c_{ir})/(a_{is}-a_{ir}) > (c_{it}-c_{is})/(a_{it}-a_{is}) \ (r,s,t\in R_i,\ r<s<t)$$

[TLP1]に対して、変数変換

$$x_{i,r(l)} = y_{il} - y_{i,l+1}, \ (l<|R_i|), \quad x_{i,r(l)} = y_{il}, \ (l=|R_i|)$$

を行なうと、つぎの[TLP2]を得ることができる

$$[\mathrm{TLP2}]: \max \sum_{i\in I}\sum_{l=1}^{|R_i|} d_{il}y_{il}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i\in I}\sum_{l=1}^{|R_i|} e_{il} y_{il} \le b,\quad y_{i1} = 1\ (i\in I),$$

$$y_{i1} \ge y_{i2} \ge \cdots \ge y_{i|Ri|} \ge 0\quad (i\in I)$$

$$\text{for}\quad d_{il} = c_{i,r_i(l)}\ ,\quad e_{il} = a_{i,r_i(l)}\qquad (l=1)$$

$$d_{il} = c_{i,r_i(l)} - c_{i,r_i(l-1)},\quad e_{il} = a_{i,r_i(l)} - a_{i,r_i(l-1)}\ (l\ge 2)$$

$$d_{il}/e_{il} \ge d_{i,l+1}/e_{i,l+1}\quad (l=2,3,\cdots,|R_i|-1\ ,\ i\in I)$$

問題[TLP2]は，つぎの問題[TLP3]と置き換えても最適解は変化しない．

$$[\text{TLP3}]:\max\quad \sum_{i\in I}\sum_{l=1}^{|R_i|} d_{il} y_{il}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i\in I}\sum_{l=1}^{|R_i|} e_{il} y_{il} \le b,\quad y_{i1} = 1\ (i\in I),$$

$$0 \le y_{il} \le 1\ (l=2,\cdots,|R_i|, i\in I)$$

問題[TLP3]の LP 最適解は，集合 $\{(i,l)|\, l\in\{2,3,\ldots,|R_i|\}, i\in I\}$ を３つの集合 $M^1, \{(i^*,l^*)\}, M^0$ に次の条件を満たすように分割したとき，

$$\min_{(i,l)\in M^1}\{d_{il}/e_{il}\} \ge \{d_{i*,l*+1}/e_{i*,l*+1}\} > \max_{(i,l)\in M^0}\{d_{il}/e_{il}\}$$

$$0 \le b^C < e_{i*,l*+1}\quad \text{for}\ \ b^C = b - \sum_{i\in I} e_{i1} - \sum_{(i,l)\in M^1} e_{il}$$

次式で与えられる．

$$y_{il}^{\mathrm{LP}} = 1\ \left((i,l)\in M^1\right),\quad y_{il}^{\mathrm{LP}} = b^C/e_{il,}\ \ \left((i,l) = (i^*, l^*+1\right),$$

$$y_{il}^{\mathrm{LP}} = 0\ \left((i,l)\in M^0\right)$$

対応する LP 値は、$f^{LP} = f^{BASE} + b^C\, d_{i*,l*+1}/e_{i*,l*+1}$ で与えられる．

ここで、$f^{BASE} = \sum_{(i,l)\in M^1} d_{il}$ である．

３．限界値の計算

問題[TLP3]において実数値の解を含むクラス i^* に対して，次の３

つの集合を定義する.

$$K^C = \left\{k \in K_i^* \mid r_{i^*}(l^*) \le k \le r_{i^*}(l^*+1)\right\}$$

$$K^L = \left\{k \in K^C \mid a_{i^*k} \le b^C + a_{i^*,r(l^*)}\right\}$$

$$K^U = \left\{k \in K^C \mid a_{i^*k} > b^C + a_{i^*,r(l^*)}\right\}$$

i^*以外のクラスに対して，次式をおく.

$$\gamma^{PRV} = \min_{(i,l)\in M^1, i\neq i^*}\left\{d_{il}/e_{il}\right\}$$

$$\gamma^{NXT} = \min_{(i,l)\in M^0, i\neq i^*}\left\{d_{il}/e_{il}\right\}$$

Sinha-Zoltners[1979]の上限値計算式は,

$$f^{UB1} = \max\left\{\Phi_1^{UB1}, \Phi_2^{UB1}\right\}$$

である. ここで,

$$\Phi_1^{UB1} = f^{BASE} + \gamma^* \max_{k\in K^L}\left\{a_{i^*k} - a_{i^*r(l^*)}\right\} + \gamma^{NXT}\left(b^C - \max_{k\in K^L}\left\{a_{i^*k} - a_{i^*r(l^*)}\right\}\right)$$

$$\Phi_2^{UB1} = f^{BASE} + \gamma^* \min_{k\in K^U}\left\{a_{i^*k} - a_{i^*r(l^*)}\right\} + \gamma^{PRV}\left(b^C - \min_{k\in K^U}\left\{a_{i^*k} - a_{i^*r(l^*)}\right\}\right)$$

である.

提案の上限値計算式は、

$$f^{UB2} = \max_{k\in K^C}\left\{\phi_k^{UB2}\right\}$$

である. ここで,

$$\phi_k^{UB2} = f^{BASE} + c_{i^*k} - c_{i^*,r(l^*)} + \gamma^{NXT}\left(b^C - \left\{a_{i^*k} - a_{i^*,r(l^*)}\right\}\right) \quad k \in K^L$$

$$\phi_k^{UB2} = f^{BASE} + c_{i^*k} - c_{i^*,r(l^*)} + \gamma^{PRV}\left(b^C - \left\{a_{i^*k} - a_{i^*,r(l^*)}\right\}\right) \quad k \in K^U$$

である.

次の 2 つの定理は，提案した計算式が Sinha-Zoltners[1979]の計算式よりも厳密な上限値を生み出すことを示している．

［定理１］ f^{UB2}は問題[K]の上限値である．

（証明） 問題[TLP2]は凸計画問題であるから，

$$\upsilon\left[TLP2 : y_{i*l} = 1\right] \leq \upsilon\left[TLP2 : y_{i*l*} = 1\right], \ (l < l^*)$$

$$\upsilon\left[TLP2 : y_{i*l*+1} = 1\right] \geq \upsilon\left[TLP2 : y_{i*l*} = 1\right], \ (l^* + 1 < l)$$

となる．ここで，$\upsilon\left[P : \sim\right]$は問題[P]に条件～を付加した問題の最適値を示す．問題[K]の最適値$\upsilon[K]$は

$\upsilon[K] \leq \max_{k \in K^C} \left\{\upsilon\left[K: x_{i*k} = 1\right]\right\}$ である．（証明終わり）

［定理２］ 限界値f^{UB2}は限界値f^{UB1}より厳密である．

（証明） 問題[TLP2]の凸性から

$$\max\left\{\phi_k^{UB2} | b^C - a_{i*k} + a_{i*l*} \geq 0, \ k \in K^C\right\} \leq \phi_1^{UB1}$$

$$\max\left\{\phi_k^{UB2} | b^C - a_{i*k} + a_{i*l*} \geq 0, \ k \in K^C\right\} \leq \phi_2^{UB1}$$

となる．したがって，次式となる．

$$f^{UB2} = \max_{k \in K^C} \left\{\phi_k^{UB2}\right\} \leq \max\left\{\phi_1^{UB1}, \phi_2^{UB1}\right\} = f^{UB1}$$

（証明終わり）

４．上限値の比較

さまざまな規模の問題に対して，代替案の間の差が最大 32 のケースにおいて上限値を比較した．提案の計算による解が LP 解よりも小さく，同時に、Sinha-Zoltners の解よりも大きくなった割合を、表１に示す．

5．参考文献

・ T. Ibaraki and N. Katoh : ``Resource allocation problems'', The MIT Press, 1988.

・ R. M. Nauss : ``The 0-1 knapsack problem with multiple-choice constraints'', Working Paper, University of Missouri-St. Louis, May 1976.

・ P.Sinha and A. A. Zoltners : ``The multiple-choice knapsack problem'', Oper. Res,. 27(Jan. 1979), 503-515.

・ T. Ibaraki, T. Hasegawa, K. Teranaka and J. Iwase : ``The multiple choice knapsack problem'', J. Oper. Res. Japan, 21(1978), 59-95.

・ H. M. Salkin and C. A. Kluyver : ``The knapsack problem: A survey'', Nav. Res. Logist. Q., 22(1975), 127-144.

・仲川，疋田：``改訂番地計算分類法'', 信学論(D), J64-D, 8(1981), 737-741.

・仲川，疋田：``作業領域を縮小した改訂番地計算分類法'',信学論(D), J65-D, 7(1981),942-943

・仲川，太田垣：``非線形ナップザック型信頼性最適化問題に対するグリーディ法の改良'', 信学論(A), J72-A, 3(1991)

・ K. Mathur, H. M. Salkin and S. Morito : ``An effect algorithm for the general multiple-choice knapsack problem(GMKP)'', Ann. of Oper. Res., 4(1985/6), 253-283.

表１　［ＬＰ解］>=［本計算法の解］、かつ、
［本計算法の解］＞［Sinha-Zoltnersの解］の割合比較

	50	100	150
100	92	91	92
200	92	89	97
300	88	97	93
400	90	92	96
500	88	93	94
600	91	94	97
700	89	93	94
800	88	95	96
900	90	97	95
1000	79	98	93
1100	89	93	97
1200	84	96	91

クラス数

各クラスの代替案数